

1. 令  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。计算  $a \cdot b, a \times b$ 。这个问题在书中的另一种表述方式是：令  $a = i + 2j + k, b = -i - 2j + k$ ，计算  $a \cdot b, a \times b$ 。其中  $i, j, k$  为  $\mathbb{R}^3$  中的三个单位向量。

2.  $a, b$  同上题， $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。计算  $a, b$  张成的平行四边形的面积， $a, b, c$  张成的平行六面体的体积。

3. 四面体 ABCD 的顶点坐标为  $A(0, 0, 0), B(1, 2, 1), C(-1, -2, 1), D(1, 0, 1)$ 。计算 ABCD 的体积。

4.  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ 。已知  $(a \times b) \times c = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $(b \times c) \times a = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，计算  $(c \times a) \times b, (b \times a) \times c$ 。

5. 令  $a, b \in \mathbb{H}$ 。已知  $ab = i + j, a = 1 + i$ ，求  $\bar{b}a, b$ 。在这个问题中， $1, i, j$  均为四元数。

6. 正方形  $X$  的四个顶点沿顺时针标记为 1, 2, 3, 4。沿对角线 13 的翻转可以用置换的符号表示为  $(\frac{1}{?} \frac{2}{?} \frac{3}{?} \frac{4}{?})$ 。先沿对角线 13 的翻转，再绕中心顺时针旋转  $\pi/2$ ，这样得到的  $X$  到自身的映射用置换的符号表示，是  $(\frac{1}{?} \frac{2}{?} \frac{3}{?} \frac{4}{?})$ 。

7.  $D_4, S_3$  中的元素个数分别为多少？方程  $x^3 = e$  在  $D_4, S_3$  中的解的个数分别为多少？（在后续课程中，我们会学到，在一个有限群  $G$  中求解方程  $x^n = e$ ，解的个数是  $n$  的约数，也同时是  $|G|$  的约数。）

8.  $\mathbb{R}^*$  作用在  $\mathbb{R}^2$  上。如果作用的方式是  $(t, (x, y)) \mapsto (tx, ty)$ ，描述所有的轨道。如果作用的方式是  $(t, (x, y)) \mapsto (tx, t^{-1}y)$ ，写出通过  $(2, -1)$  的轨道。如果作用的方式是  $(t, (x, y)) \mapsto (t^3x, t^2y)$ ，写出通过  $(2, -1)$  的轨道。

9. 考虑  $GL(2, \mathbb{R})$  在  $\mathbb{R}^2$  上的自然作用  $GL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

求圆  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  在矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  作用下的像的方程。求双曲线  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  在矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  作用下的像的方程。

10. 平面的点位式方程，三点式方程。见解析几何教材 p68 页。在答题时要把行列式计算出来。不可以只写出行列式的表达式。

11. 计算线形映射的矩阵。见 Lay 的教材第一章 §9, 以及第一章 §9 课后习题 1-12。

12. 令  $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$  为  $\mathbb{R}^n$  中的 6 个向量。如果它们之间满足关系

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

找出  $3 \times 3$  矩阵  $A$ , 满足

$$(f_1, f_2, f_3)A = (e_1, e_2, e_3)$$

证明  $f_1, f_2, f_3$  线性无关当且仅当  $e_1, e_2, e_3$  线性无关。证明  $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{span}\{f_1, f_2, f_3\}$ 。

13. 给出线性变换  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 计算  $\ker(T), \text{im}(T)$  的基。这类问题在 Lay 的教材中的表述为: 给出  $m \times n$  阶矩阵  $A$ , 计算  $\text{Col}(A), \text{Nul}(A)$  的基。参考 Lay 的教材第二章 §8 以及相应课后习题。

14. 正方形  $X$  的四个顶点沿顺时针标记为 1,2,3,4。映射  $T: X \rightarrow X$  满足性质:  $X$  内的任意两点间的距离在映射  $T$  作用前后不发生改变。证明  $T$  一定是课堂上描述的  $D_4$  的 8 个元素中的一个。

15. 在  $\mathbb{R}$  中, 方程  $x^2 = -1$  无解。在  $\mathbb{C}$  中,  $x^2 = -1$  有两个解。在  $\mathbb{H}$  中,  $x^2 = -1$  的解是哪些四元数? 证明你的结论。

16. 考虑映射

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto x_1i + x_2j + x_3k$$

验证：如果  $a, b \in \mathbb{R}^3$ ，则  $\phi(a \times b) = \frac{1}{2}(\phi(a)\phi(b) - \phi(b)\phi(a))$ 。（方法：向量的外积  $a \times b$  的计算利用解析几何教材 p37 页公式 1.8-9。四元数的乘积则按照乘法分配率以及关系  $i^2 = -1, ij = k, \dots$  进行计算。）

17. 考虑  $3 \times 3$  的实矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

如果线性映射

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto Ax$$

满足条件  $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$  对任意  $x, y \in \mathbb{R}^3$  成立（这里  $\cdot$  表示向量的内积），证明  $T$  是保长映射（即对于  $\mathbb{R}^3$  中任意两点  $p_1, p_2$  我们有  $d(T(p_1), T(p_2)) = d(p_1, p_2)$ ，这里  $d(-, -)$  表示两点间的距离。提示：需要用到内积与两点间距离的关系。见 lecture 16 ppt 第 16 页，或 Lay 的教材第 6 章第 1 节。）

18. 继续考虑 17 题。条件  $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$  表现在矩阵  $A$  中数字  $a_{ij}$  的选取上，意味着这些  $a_{ij}$  需要满足什么条件？（提示：首先考虑条件  $T(e_1) \cdot T(e_1) = e_1 \cdot e_1 = 1$ 。这意味着矩阵  $A$  的第一列需要满足什么关系？其次对于  $i, j = 1, 2, 3$  类似地考虑  $T(e_i) \cdot T(e_j) = e_i \cdot e_j$ 。）满足 17 题条件的矩阵叫做正交矩阵。参考 12 月 5 日上传的影印抽象代数教材的例 1.8。证明正交矩阵的行列式等于 1 或 -1。

19. 令  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  为任意一个  $\mathbb{R}^2$  到自身的保长映射。（这里我们并没有假设  $T$  是线性映射，也没有假设  $T$  是双射。我们只是假设了对于平面上任意两点  $P_1, P_2$  都有  $d(P_1, P_2) = d(T(P_1), T(P_2))$ ）如果平面上存在唯一的一个点  $P$ ，满足  $T(P) = P$ （这个点叫做映射  $T$  的不动点），证明  $T$  一定是平面围绕点  $P$  的某个旋转。

20. 考虑平面上的一个正五边形  $X$ 。如果映射  $T : X \rightarrow X$  满足条件：对任意  $P_1, P_2 \in X$  都有  $d(P_1, P_2) = d(T(P_1), T(P_2))$ ，则称  $T$  为  $X$  到自身的一个保长映射。

所有的  $X$  到自身的保长映射构成一个集合，记做  $D_5$ 。找出 10 个属于  $D_5$  的保长映射。证明  $D_5$  中的映射必然把  $X$  的顶点映射到顶点，边映射到边，中心映射到中心。从而证明  $D_5$  中的映射全部都是双射。